Procenty %

$\%$ **oznacza liczbę** $0{,}01$ **czyli** $1/100$	*Łacińskie „pro cent" oznacza „na 100"*
„<u>p %</u>" oznacza iloczyn $p \cdot 0{,}01 = \dfrac{p}{100}$	*Stosuje się także ‰ oznaczający 0,001* *Łacińskie „pro mille" oznacza „na 1000"*
Wyrażenie „<u>p % liczby x</u>" oznacza iloczyn $p \cdot \% \cdot x = 0{,}01 \cdot p \cdot x = \dfrac{p \cdot x}{100}$	
Stwierdzenie „<u>A jest większe o p% od B</u>" oznacza zachodzenie równości $A = B + p \cdot \% \cdot B$ **czyli** $A = B \cdot (1 + p \cdot \%)$ **Dla „mniejsze" będzie jak wyżej, ale z odejmowaniem.**	

Tyle tylko wystarczy zapamiętać, by tłumaczyć zapis słowny na matematyczny.
W Ściągawce tego niestety nie ma.

Pierwsza rata, stanowiąca 9% ceny, jest równa 189 zł. Ile wynosi cena?

Najpierw etap „Zapisanie”
(tego co podane w formie matematycznej)...

Frazę „9% ceny” możemy matematycznie zapisać jako

$\boxed{9 \cdot \% \cdot c}$ **gdzie przez** c **oznaczyliśmy cenę.**

„jest równa 189 zł” zapisujemy jako $\boxed{= 189}$

(symbol zł możemy opuścić, bo jasne że wszystko będzie w złotych)

Całość da się więc zapisać jako równanie $\boxed{9 \cdot \% \cdot c = 189}$

Czas na etap drugi „Szukanie”...

Ale nie ma już czego szukać, bo $\boxed{9 \cdot \% \cdot c = 189}$ **wystarczy do obliczenia** c**.**
Zatem etap trzeci „Obliczanie”:

$$c = \frac{189}{9 \cdot \%} = \frac{189}{9 \cdot 0{,}01} = \frac{189}{0{,}09} = \frac{18900}{9} = 2100$$

2010-2(1)

Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały przed obniżką?

„Spodnie po obniżce ceny o 30%” należy (patrz początkowe wskazówki) zanotować jako:

$c - 30 \cdot \% \cdot c$ **gdzie** $c =$ **pierwotna cena spodni**

i dalej całe zdanie jako...

równanie $c - 30 \cdot \% \cdot c = 126$ **czyli** $\boxed{c \cdot (1 - 30\%) = 126}$

stąd $c = \dfrac{126}{1 - 30 \cdot \%} = \dfrac{126}{1 - 0{,}30} = \dfrac{126}{0{,}70} = 180$

2013-2(1)

Liczby a i b są dodatnie oraz 12% liczby a jest równe 15% liczby b.
Ile % liczby b stanowi liczba a ?

Tym razem mamy więcej fraz. Zapiszmy je bez pośpiechu, kolejno...

„Liczby a i b są dodatnie” $\boxed{a > 0 \ \text{ i } \ b > 0}$

„12% liczby a” $\boxed{12 \cdot \% \cdot a}$

„15% liczby b” $\boxed{15 \cdot \% \cdot b}$

„(12% liczby a) jest równe (15% liczby b)” $\boxed{12 \cdot \% \cdot a = 15 \cdot \% \cdot b}$

Jak jednak zapisać frazę ostatnią:

„Ile % liczby b stanowi liczba a ?” .....

„Ile % liczby b stanowi liczba a ?”

Słowo „ile” oznacza jakąś liczbę. Możemy więc oznaczyć ją jakąś literą, dajmy na to x, i wówczas to zdanie przybierze postać „x % liczby b stanowi liczba a”

Teraz już widać że można je zapisać jako równania $\boxed{x \cdot \% \cdot b = a}$

Zapisaliśmy już wszystko – czas więc na zestawienie:

$$\begin{cases} a > 0 \;\; i \;\; b > 0 \\ 12 \cdot \% \cdot a = 15 \cdot \% \cdot b \\ x \cdot \% \cdot b = a \end{cases}$$

Klamra oznacza że warunki muszą być spełnione jednocześnie, czyli połączone są spójnikami „i”.

Etap „Zapisanie” mamy już za sobą.
Etap „Szukanie” jest zbędny, bo mamy tyle samo równań co niewiadomych.
Czas więc na „Obliczanie”

Trzeba z tego układu wyliczyć x. Od czego zacząć?...

Żadna „teoria wyliczania” nie jest potrzebna – po prostu trzeba zacząć od wyliczenia czegokolwiek, a potem... zobaczymy.
Oczywiście najlepiej zacząć od tego co „Najłatwiejsze” do wyliczenia – w tym przypadku od a, bo... jest już wyliczone w trzecim równaniu: $a = x \cdot \% \cdot b$

Co zrobić z tym a? Nie widać żadnego sensownego posunięcia oprócz podstawienia tej wyliczonej wartości w miejsce a do równania drugiego.
Zatem podstawiamy i otrzymujemy:

$$12 \cdot \% \cdot (x \cdot \% \cdot b) = 15 \cdot \% \cdot b$$

No i znowu trzeba coś wyliczać, ale najpierw to uprośćmy („Upraszczanie”):

$12 \cdot \% \cdot x \cdot \% \cdot b = 15 \cdot \% \cdot b$ **dzielimy obie strony przez** $\% \cdot b$

$12 \cdot \% \cdot x = 15$ **podstawiamy** $\% = 0{,}01$ **i mnożymy**

$0{,}12 \cdot x = 15$ **dzielimy obie strony przez** $0{,}12$

$$x = \frac{15}{0{,}12} = \frac{1500}{12} = \frac{500}{4} = 125$$

Cenę zwiększono o 30%, a potem obniżono również o 30%.
Czy teraz cena jest większa od pierwotnej czy mniejsza?

Mamy trzy ceny, więc („Oznaczanie”) oznaczmy je literami:

$p =$ **pierwotna** $\quad d =$ **druga** $\quad k =$ **końcowa**

I zapisujmy treść zadania matematycznie...

$$\begin{cases} d = p + 30\% \cdot p \\ k = d - 30\% \cdot d \\ k = p + x\% \cdot p \end{cases}$$

W równaniu trzecim wstawiliśmy $+$ (tak jakby cena k była większa od p), ale to nic nie szkodzi, bo jeśli okaże się mniejsza, to x wyjdzie ujemne.

Tyle samo rownań co niewiadomych – zatem „Szukanie" jest zbędne – można od razu przejśc do etapu „Obliczanie":

Teraz chwila refleksji – czy nie udaloby się tu czegoś uprościć lub skrócić? („Upraszczanie" to podstawowy obowiązek matematyka). No jasne! Po prawych stronach jest dwukrotnie to samo – można więc „powyciągać" je przed nawias:

$$\begin{cases} d = p(1 + 30\%) \\ k = d(1 - 30\%) \\ k = p(1 + x\%) \end{cases}$$

Równanie pierwsze to akurat wzór na d – podstawmy je więc do drugiego...

$$\begin{cases} k = p(1+30\%)(1-30\%) \\ k = p(1+x\%) \end{cases}$$

Oczywiście oba równania zostawiamy, bo opuszczenie trzeciego (mimo iż nie ma w nim d) byłoby utratą podanej informacji.

Teraz k z pierwszego podstawiamy do drugiego (znowu „Podstawianie”), po czym oczywiście „Upraszczanie” aż w końcu obliczy się x

$p(1+30\%)(1-30\%) = p(1+x\%)$	**dzielimy obie strony przez p**
$(1+30\%)(1-30\%) = (1+x\%)$	**podstawiamy $\% = 0,01$**
$(1+0,30)(1-0,30) = 1+x\cdot 0,01$	**rachujemy**
$1,30\cdot 0,70 = 1+x\cdot 0,01$	**i dalej**
$0,91 = 1+x\cdot 0,01$	**odejmujemy od obu stron 1**
$-0,09 = x\cdot 0,01$	**dzielimy obie przez $0,01$**
$x = \dfrac{0,09}{-0,01} = -9$	**co oznacza że efekt tych dwóch przecen jest taki jakby cenę pierwotną od razu obniżono o 9%**

2015-1(1)

Cena wraz z 7% podatkiem VAT wynosi 34 347 zł.
Jaka będzie cena z 23% podatkiem VAT?

Podatek VAT jest to coś co sprzedawca musi doliczyć do „swojej” ceny i oddać to w całości skarbowi państwa.

Zapiszmy oba zdania w postaci równań...

$$\begin{cases} c \cdot (1+7\%) = 34347 \\ c \cdot (1+23\%) = d \end{cases}$$

c **= cena jaka jest dla sprzedawcy**
d **= cena jaka będzie dla klienta**

Z pierwszego równania wyliczamy $c = \dfrac{34347}{1+7\%} = \dfrac{34347}{1,07} = 32100$

Podstawiamy do drugiego i wyliczamy d

$$d = 32100 \cdot (1+23\%) = 32100 \cdot 1,23 = 39483$$

Bok kwadratu A jest o 10% dłuższy od boku kwadratu B.
O ile % pole kwadratu A jest większe od pola kwadratu B?

Dla rozjaśnienia dobrze jest ująć to (przynajmniej mentalnie) w tabelkę...

	bok	pole
kwadrat A	a	a^2
kwadrat B	b	b^2

„Bok kwadratu A jest o 10% dłuższy od boku kwadratu B” zapisujemy jako:

$$a = b \cdot (1 + 10\%)$$

„Pole kwadratu A jest o p% większe od pola kwadratu B” zapisujemy jako:

$$a^2 = b^2 \cdot (1 + p\%)$$

Mamy więc układ 2 rownań z 3 niewiadomymi:

$$\begin{cases} a = b \cdot (1 + 10\%) \\ a^2 = b^2 \cdot (1 + p\%) \end{cases}$$ **bierzemy a z pierwszego i podstawiamy w drugim...**

$$[b \cdot (1 + 10\%)]^2 = b^2 \cdot (1 + p\%)$$

$$b^2 \cdot (1 + 10\%)^2 = b^2 \cdot (1 + p\%)$$ **dzielimy obie strony przez b^2**

$$(1 + 10\%)^2 = (1 + p\%)$$ **i dalej proste rachunki...**

$$(1+10\cdot 0{,}01)^2 = 1+p\cdot 0{,}01 \qquad 1{,}1^2 = 1+p\cdot 0{,}01$$

$$1{,}21 = 1+p\cdot 0{,}01 \qquad 1+p\cdot 0{,}01 = 1{,}21$$

$$p\cdot 0{,}01 = 1{,}21-1 \qquad p = \frac{0{,}21}{0{,}01} = 21$$

mp2015-d-3(1)

1000 zł ulokowano w banku na roczną lokatę oprocentowaną w wysokości 4% w stosunku rocznym. Po zakończeniu lokaty od naliczonych odsetek pobrany będzie podatek w wysokości 19%. Ile pozostanie na lokacie?

Po roku 1000 zł wzrośnie o 4%, czyli na lokacie będzie...

$$1000 \cdot (1+4\%)$$

Odsetki to po prostu ten przyrost, zatem równe są

$$1000 \cdot (1+4\%) - 1000 = 1000 \cdot 4\%$$

Od powyższego bank pobierze 19% podatku, czyli odejmie $(1000 \cdot 4\%) \cdot 19\%$

Na lokacie pozostanie więc to co było po roku minus podatek, czyli...

$$1000\cdot(1+4\%)-(1000\cdot 4\%)\cdot 19\% = 1000\cdot(1+4\%-19\%\cdot 4\%) =$$
$$= 1000\cdot(1+4\%\cdot(1-19\%)) = 1000\cdot(1+\tfrac{4}{100}\cdot\tfrac{81}{100})$$ **(bo $1=100\%$)**

2016-3(1)

Liczba b stanowi 48% liczby a oraz 32% liczby c **Oblicz stosunek liczby c do liczby a**

Najpierw „Zapisanie” (słownego postaci matematycznej):

$$b = 48\%\cdot a$$
$$b = 32\%\cdot c$$

Stosunek to po prostu iloraz, trzeba więc obliczyć $x = \dfrac{c}{a}$

Skąd wziąć c i a ?...

Oczywiście wyliczamy je z zapisanych równań: $a = \frac{b}{48\%}$ $c = \frac{b}{32\%}$

i podstawiamy do stosunku:

$$x = \frac{c}{a} = \frac{\frac{b}{32\%}}{\frac{b}{48\%}} = \frac{b}{32\%} \cdot \frac{48\%}{b} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}$$