Logarytmy

2012-8-3(1)

Oblicz wartość wyrażenia $\log_3 27 - \log_3 1$

Aby to obliczyć, nie musimy wcale znać się na logarytmach!
Wystarczy zajrzeć do Ściągawki Maturalnej (pod Logarytmy, oczywiście)
i znaleźć w niej wzór w którym jest coś podobnego.

Wzór to nic innego jak wzór postępowania – podobnie jak instrukcja obsługi, recepta na sporządzenie leku, obowiązująca procedura itp.
W matematyce – inaczej niż w życiu – wzory należy stosować idealnie dokładnie (nawet drobne odstępstwo może być katastrofalne).

Po przejrzeniu wzorów spostrzegamy że prawa strona wzoru...

$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$ **ma identyczny kształt z naszym wyrażeniem**

$\log_3 27 - \log_3 1$ **(zamiast** a **jest** 3**. zamiast** x **jest** 27**, zamiast** y **jest** 1 **)**

Po wykonaniu podstawień: $a = 3 \quad x = 27 \quad y = 1$ **wzór przybiera postać**

$\log_3 \frac{27}{1} = \log_3 27 - \log_3 1$ **(po prawej jest dokładnie nasze wyrazenie).**

Zatem (po zamianie stron) $\log_3 27 - \log_3 1 = \log_3 \frac{27}{1} = \log_3 27$

Zadanie sprowadziło się więc do obliczenia $\log_3 27$

Może to będzie jakaś „łatwa" liczba?

To co mamy obliczyć zazwyczaj oznacza się jakąś literą, na przykład x

Zatem nasz problem przybiera postać równania $\log_3 27 = x$ **...**

Zajrzyjmy ponownie do Ściągawki i poszukajmy czegoś podobnego...

Oto jest: $\boxed{\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c}$

Nic nie szkodzi że to nie jest równanie, bo to też jest wzór.
Mianowicie jest to wzór logiczny oznaczający że równanie po jego lewej stronie jest równoważne ($\Leftrightarrow$) równaniu po prawej – czyli że jedno z nich można zastąpić drugim. Krócej mówiąc – jest to równanie logiczne.
Jak je wykorzystać?

Zestawmy obok siebie: $\log_3 27 = x \qquad \log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$

Podstawmy w równaniu logicznym: $a = 3 \quad c = 27 \quad b = x$

a przybierze ono postać $\log_3 27 = x \Leftrightarrow 3^x = 27$

Zatem: zamiast zastanawiać się ile wynosi x **w równaniu** $\log_3 27 = x$

możemy zastanowić się ile wynosi x **w równaniu** $3^x = 27$

A to jest bardzo łatwe – „na oko" widać i łatwo sprawdzić że $x = 3$

Dzięki równaniu logicznemu udało nam się problem z logarytmami sprowadzić do problemu ze znacznie prostszymi potęgami.
To jest ogólna dyrektywa postępowania – UPRASZCZANIE:

> **Staraj się przerobić problem tak żeby był prostszy albo aby pojawiło się w nim to co już znasz i potrafisz.**

2013-3(1)

Oblicz wartość wyrażenia $\log 100 - \log_2 8$

Wygląda to na błędny tekst zadania, bowiem w pierwszym logarytmie nie podano żadnej liczby po symbolu $\log$ **– tej zmniejszonej i obniżonej.**

Nazywana jest ona „<u>podstawą logarytmu</u>”

Jednak jest dobrze!
Umówiono się bowiem (w matematyce podstawowej) że jeśli tej liczby nie napisano, to wynosi ona 10 (celem tej umowy jest zaoszczędzenie pisania).

Należy to zapamiętać, bo w Ściągawce jest mało widoczne.

Zatem nasze wyrażenie to tak naprawdę...

$$\log_{10} 100 - \log_2 8$$

Ze wzoru $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$ **nie da się skorzystać,**

bo logarytmy w nim występujące mają tę samą podstawę podczas gdy w naszym wyrażeniu $\log_{10} 100 - \log_2 8$ **postawy są różne.**

Spróbujmy zatem policzyć oba logarytmy osobno...

„Oznaczmy” $\log_{10} 100 = x$ **oraz** $\log_2 8 = y$

i przekształćmy je (jak w poprzednim zadaniu) według wzoru logicznego

$$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$$

Otrzymamy...

$$10^x = 100 \qquad 2^y = 8$$

skąd już z łatwością wykombinujemy że:

$x = 2 \qquad y = 3$ **czyli całe wyrażenie ma wartość** -1**.**

A jeśli także potęgi sprawiają nam trudności, to spróbujmy powolutku:

$$100 = 10 \cdot 10 = 10^2 \qquad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$10^x = 10^2 \qquad 2^y = 2^3$$

$$x = 2 \qquad y = 3$$

Oczywiście nie byłoby tak łatwo (a nawet bardzo trudno), gdyby było np:

$$10^x = 120 \qquad 2^y = 20$$

ale na szczęście tego nam oszczędzono.

Oblicz wartość wyrażenia $2 \cdot \log_5 10 - \log_5 4$

We wzorach na logarytmy nie znajdujemy nic co by pasowało do całego wyrażenia. Wobec tego szukamy czegoś co pasuje do jego części - i znajdujemy że fragment...

$2 \cdot \log_5 10$ **pasuje do prawej strony wzoru** $\boxed{\log_a x^r = r \cdot \log_a x}$

Wymieniamy wobec tego ten fragment i nasze wyrażenie zmienia się na

$$\log_5 10^2 - \log_5 4$$

Postąpiliśmy zgodnie z Dyrektywą Porcjowania:

Jeśli nie wiesz co zrobić z całością, skup się na jakiejś jej porcji.
Może ją uda ci się jakoś przerobić – mniejsze jest prostsze!

„Szukamy" kolejnego dopasowania we wzorach i znajdujemy że nasze

wyrażenie pasuje teraz do prawej strony wzoru $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$

co oznacza że jest równe wyrażeniu $\log_5 \frac{10^2}{4}$ **czyli** $\log_5 25$

Aby to obliczyć tworzymy (jak wcześniej) równanie $\log_5 25 = x$ **...**

i zmieniamy je (stosując równanie logiczne $\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$)

na równanie równoważne $5^x = 25$ czyli $5^x = 5^2$

z którego wynika że $x = 2$

2014-4(1)

Oblicz wartość wyrażenia $\log_8 16 + 1$

Pasującego wzoru niestety nie widać.
Może uda się obliczyć sam logarytm osobno...

Piszmy $\log_8 16 = x$ **i zmieniamy to na** $8^x = 16$

Niestety, „ładnego” x **nie ma (widać że jest ułamkowy, gdzieś między 1 a 2)**

Zajrzyjmy jeszcze raz do wzorów – może znajdzie się coś co jest przynajmniej częściowo podobne? ...

Faktycznie – nasze wyrażenie jest częściowo podobne („Porcjowanie") do prawej strony wzoru $\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$

Różnica polega na tym, że zamiast drugiego logarytmu jest u nas liczba 1
Czy można to jakoś usunąć tę różnicę?
Nasuwa się pomysł aby liczbę 1 przerobić na logarytm, czyli aby było
$1 = \log_8 x$ **gdzie** x **jest jakąś na razie nieznaną liczbą.**

Aby obliczyć ten x **zamieniamy równość** $1 = \log_8 x$ **na** $8^1 = x$ **skąd** $x = 8$

(według stosowanego już wcześniej wzoru logicznego $\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$)

Zatem $1 = \log_8 8$ **czyli nasze wyrażenie przybiera postać** $\log_8 16 + \log_8 8$

"Szukamy" dalej we wzorach...

i zauważamy że $\log_8 16 + \log_8 8$ jest podobne do prawej strony wzoru

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Stosujemy więc ten wzór i otrzymujemy że $\log_8 16 + \log_8 8 = \log_8(16 \cdot 8)$

Czy można to wyliczyć? tzn zrobić tak aby nie było logarytmu...

Trzeba spróbować czy $\log_8(16 \cdot 8)$ uda się się sprowadzić do jakiejś prostszej postaci – np bez logarytmu (bo logarytmy są trudne)...

Podobnie jak robiliśmy to wcześniej, piszemy równanie $\log_8(16 \cdot 8) = x$

i zastępujemy je równaniem równoważnym ale prostszym $8^x = 16 \cdot 8$

Skoro po lewej stronie mamy potęgę, to spróbujmy uzyskać ją i po prawej („Upodabnianie" – przerabiaj tak aby było podobnie bądź identycznie):

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \quad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ **stąd** $16 \cdot 8 = 2^4 \cdot 2^3 = 2^7$

Mamy więc $8^x = 2^7$ **czyli po obu stronach są potęgi, lecz niestety ich podstawy są różne. Możemy jednak** 8 **zastąpić przez** 2^3 **uzyskując:**

$(2^3)^x = 2^7$ **czyli** $2^{3x} = 2^7$ **skąd** $3x = 7$ **czyli** $x = \frac{7}{3}$

Zatem odpowiedź brzmi $\boxed{\log_8 16 + 1 = \frac{7}{3}}$

Dane są liczby: $a = -\frac{1}{27}$ $b = \log_{\frac{1}{4}} 64$ $c = \log_{\frac{1}{3}} 27$ **Oblicz** $a \cdot b \cdot c$

Zamieńmy równości z logarytmami na równości z potęgami (te są łatwiejsze)...

$$\left(\tfrac{1}{4}\right)^b = 64 \quad \frac{1^b}{4^b} = 64 \quad \frac{1}{4^b} = 64 \qquad 4^{-b} = 4^3 \quad -b = 3 \quad b = -3$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^c = 27 \quad \frac{1^c}{3^c} = 27 \quad \frac{1}{3^c} = 27 \qquad 3^{-c} = 3^3 \quad -c = 3 \quad c = -3$$

I rzeczywiście – niemal automatycznie udało się obliczyć b i c, a teraz:

$$a \cdot b \cdot c = -\frac{1}{27} \cdot (-3) \cdot (-3) = -\frac{9}{27} = -\frac{1}{3}$$

2011-8(1)

Dla jakich jest określone wyrażenie $\log_4(2x-1)$

Zaglądamy do Ściągawki by zorientować się o co chodzi („Szukanie”).
Znajdujemy że w wyrażeniu $\log_a c$ musi być: $c > 0 \quad a > 0 \quad a \neq 1$
Zatem...

musi być $2x-1>0$ **czyli** $2x>1$ **czyli** $x>\frac{1}{2}$

Można to zapisać bardziej naukowo, tzn w postaci przedziału $x\in(\frac{1}{2},\infty)$

Wyznaczyliśmy tzw dziedzinę funkcji $\log_4(2x-1)$

albo – mówiąc po ludzku:

zbiór wszystkich x **dla których funkcja** $\log_4(2x-1)$ **da się obliczyć,**

albo (jak w zadaniu) **– obliczyliśmy dla jakich** x **funkcja jest określona.**

Wykazać że prawdziwa jest równość $$\frac{2}{\log_{2\sqrt{2}}3}+\frac{1}{\log_4 9}=4\cdot\log_3 2$$

Jest to bardzo zawikłane – wszystko jest różne, a całość skomplikowana.
Spróbujmy dobrać się do każdego logarytmu z osobna, a nuż...

Oczywiście „Oznaczanie” i „Upraszczanie”):

$$x=\log_{2\sqrt{2}}3 \quad (2\sqrt{2})^x=3 \quad (2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}})^x=3 \qquad 2^{\frac{3}{2}x}=3$$

$$y=\log_4 9 \quad 4^y=9$$

$$z=\log_3 2 \quad 3^z=2$$

Mamy więc 3 takie równości;

$$2^{\frac{3}{2}x}=3 \qquad 4^y=9 \qquad 3^z=2$$

Przypatrując się im dostrzegamy możliwość upodobnienia – tak aby podstawy potęg były „bardziej jednakowe” (Dyrektywa Upodobniania)...

$$2^{\frac{3}{2}x}=3 \qquad 4^y=9 \qquad 3^z=2$$

Równość druga wyraźnie „odstaje” od pozostałych, spróbujmy ją przerobić:

$$4^y=9 \quad (2^2)^y=3^2 \quad 2^{2y}=3^2 \quad 2^y=3$$

Teraz...

są już bardziej podobne: $\boxed{2^{\frac{3}{2}x} = 3 \quad 2^{y} = 3 \quad 3^{z} = 2}$

dzięki czemu z pierwszych dwóch można wywieść że $2^{\frac{3}{2}x} = 2^{y}$ **skąd** $\boxed{\frac{3}{2}x = y}$

Trzeba jeszcze jakoś wykorzystać trzecią równość: $3^{z} = 2$

Gdyby była w niej 3 **bez potęgi, można byłoby postąpić jak poprzednio.**

Ale jest 3^{z} **!... Czy można ją przerobić tak aby wyglądała** $3 =$ **cośtam ?...**

Można – wystarczy podnieść obie jej strony do potęgi $\frac{1}{z}$:

$$3^z = 2 \qquad (3^z)^{\frac{1}{z}} = 2^{\frac{1}{z}} \qquad 3^{z\cdot\frac{1}{z}} = 2^{\frac{1}{z}} \qquad 3 = 2^{\frac{1}{z}}$$

Teraz nasze 3 równości przybierają postać:

$$\boxed{2^{\frac{3}{2}x} = 3 \qquad 2^y = 3 \qquad 3 = 2^{\frac{1}{z}}}$$

co z dwóch ostatnich pozwala wywieść że $2^y = 2^{\frac{1}{z}}$

skąd $y = \frac{1}{z}$ **czyli** $\boxed{yz = 1}$

Weźmy się w końcu za naszej równość...

$$\frac{2}{\log_{2\sqrt{2}} 3} + \frac{1}{\log_4 9} = 4 \cdot \log_3 2$$

Po pierwsze podstawmy $x = \log_{2\sqrt{2}} 3 \quad y = \log_4 9 \quad z = \log_3 2$

a przybierze ona postać bardziej przejrzystą: $\boxed{\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4 \cdot z}$

Zestawmy teraz wszystko co wypracowaliśmy:

$\boxed{\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4 \cdot z}$ **oraz** $\boxed{\frac{3}{2} x = y}$ **i** $\boxed{zy = 1}$

Pierwsze równanie jest zbyt skomplikowane. Po co nam ułamki?
Zlikwidujmy je mnożąc obie strony przez xy

$$\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot xy = 4 \cdot z \cdot xy \qquad \frac{2}{x} \cdot xy + \frac{1}{y} \cdot xy = 4 \cdot z \cdot xy$$

$2y + x = 4zxy$ **i teraz możemy podstawić w nim:**

$\boxed{y = \frac{3}{2}x}$ **oraz** $\boxed{zy = 1}$

co daje $2 \cdot \frac{3}{2}x + x = 4x \cdot 1$ **czyli** $4x = 4x$

a to jest oczywistą prawdą! zatem pierwotnej równości dowiedliśmy.

Rozwiązać równanie $\log_3(\log_9 x) = \log_9(\log_3 x)$

Jest ono zbyt zawikłane – „oznaczmy" logarytmy wewnętrzne literami:

$\log_9 x = a$ $\log_3 x = b$ **a już wygląd będzie prostszy:** $\log_3 a = \log_9 b$

Co z tego że jest prościej, skoro nadal nie widać jak to „ugryźć" – ale, ale...

nie wykorzystaliśmy wprowadzonych oznaczeń, a są w nich „podobieństwa”:
to samo x **oraz pokrewne** 9 **i** 3 $(9 = 3^2)$**. Zatem przekształćmy obie równości:**

$$\log_9 x = a \;\Rightarrow\; 9^a = x$$
$$\log_3 x = b \;\Rightarrow\; 3^b = x$$

Stąd wynika że: $3^b = 9^a \qquad 3^b = (3^2)^a$

$$3^b = 3^{2a} \qquad \boxed{b = 2a}$$

Teraz równanie $\log_3 a = \log_9 b$ **stało się jeszcze przyjemniejsze:**

$$\log_3 a = \log_9 (2a)$$

Niestety, podstawy logarytmów są różne.
Co robić? to proste – zajrzymy do Ściągawki! („Szukanie”)
może jest w niej wzór na zmianę podstawy logarytmu...

Faktycznie, jest taki wzór:

$$\boxed{\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}}$$

wg ktorego można zmienić podstawę 9 **na** 3**:**

$$\log_9(2a) = \frac{\log_3(2a)}{\log_3 9} = \frac{\log_3(2a)}{2}$$

i kiedy podstawimy to do równania, przybierze ono postać:

$$\log_3 a = \frac{\log_3(2a)}{2} \qquad 2\cdot\log_3 a = \log_3(2a) \qquad \log_3 a^2 = \log_3(2a)$$

z czego wynika że: $a^2 = 2a$ $\quad a\cdot(a-2) = 0$ **czyli:** $a = 0$ **lub** $a = 2$

$a = 0$ **być nie może, bo w równaniu jest** $\log_3 a$ **(a wiadomo że liczba logarytmowana musi być** > 0**), zatem** $a = 2$

Teraz przypominamy sobie że oznaczyliśmy $\log_9 x = a$ **skąd wynika że**

$$\log_9 x = 2 \;\Rightarrow\; 9^2 = x \;\Rightarrow\; x = 81$$

Uff, to było naprawdę trudne.

Udowodnij że $\log_x(xy)\cdot\log_y\frac{y}{x}=\log_y(xy)\cdot\log_x\frac{y}{x}$

Bardzo to splątane – spróbujmy „uprościć” (wg wzorów na logarytmy):

$$(\log_x x+\log_x y)(\log_y y-\log_y x)=(\log_y x+\log_y y)(\log_x y-\log_x x)$$

Oczywiście $\boxed{\log_a a=1}$**, więc „podstawmy” (będzie jeszcze prościej):**

$$(1+\log_x y)(1-\log_y x)=(\log_y x+1)(\log_x y-1)$$

i po „porządkujących” rachunkach otrzymamy:

$$2=2\cdot\log_y x\cdot\log_x y$$

$$\log_y x\cdot\log_x y=1$$

Dyrektywa Upraszczania zadziałała – już prościej być nie może.
Co dalej?... co nam przeszkadza?...

$$\log_y x \cdot \log_x y = 1$$

Niechybnie to że w tych logarytmach są różne podstawy, bo przecież zawsze jest prościej i lepiej kiedy są identyczne. Czy można to osiągnąć?
Jasne – wystarczy zajrzeć do Ściągawki, a okaże się że jest w niej
Wzór na zamianę podstawy logarytmu.
Stosujemy go (starannie) do logarytmy, dajmy na to, pierwszego:

$$\boxed{\log_y x = \frac{\log_x x}{\log_x y}}$$

i po podstawieniu wyniku do równania naszego przybiera ono postać:

$$\frac{\log_x x}{\log_x y} \cdot \log_x y = 1$$

czyli

$\log_x x = 1$ **a to jest niewątpliwą prawdą!**

Niech $\log_7 4 = a$ **Wyznacz** $\log_{\sqrt{2}} 49$ **w zależności od** a

Jak zazwyczaj, „oznaczmy" to co mamy wyliczyć jako x: $\log_{\sqrt{2}} 49 = x$

Po co nam trudny logarytm? potęga jest „łatwiejsza"!
Nadajmy więc obu równaniom postać potęgową, stosując do zamiany znaną ze Ściągawki tożsamość $\boxed{\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c}$:

$$7^a = 4 \qquad (\sqrt{2})^x = 49$$

Jest już prościej, ale są w tym i pierwiastek i potęgi – po co nam ta dwoistość?
Pierwiastki są mniej „czytelne" – jak je zamienić na potęgi?...

Zaglądamy do Ściągawki i znajdujemy wzór: $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$
U nas nie ma wprawdzie żadnej liczby w miejscu n **ale trzeba wiedzieć że jest zwyczaj aby nic nie pisać kiedy** $n = 2$ **(podobnie zamiast** $\log_{10}$ **pisze się** $\log$**).**

Zatem $\sqrt{2}$ **to** $\sqrt[2]{2^1}$ **a to wg powyższego wzoru jest** $= 2^{\frac{1}{2}}$

Podstawiamy więc to do równości $(\sqrt{2})^x = 49$ **otrzymując** $(2^{\frac{1}{2}})^x = 49$**,**

co z kolei można uprościć wg wzoru $\boxed{(a^r)^s = a^{r \cdot s}}$ **do równości** $2^{\frac{x}{2}} = 49$**.**

Zestawmy ponownie obie równości: $7^a = 4 \quad 2^{\frac{x}{2}} = 49$
Uprościliśmy już maxymalnie, więc może czas na „Upodobnianie”...

$$7^a = 4 \qquad 2^{\frac{x}{2}} = 49$$

Pewne podobieństwa dostrzegamy: $4 = 2^2 \quad 49 = 7^2$

No to je zastosujmy (bo cóż innego pozostaje?):

$$7^a = 2^2 \qquad 2^{\frac{x}{2}} = 7^2$$

Co teraz? pomyślmy o jakiejś innej dyrektywie, np o „Podstawianiu”.
Gdyby w którymś równaniu było po jednej stronie samotna 2 lub 7, to można by ją podstawić do drugiego. Jak to zrobić? chyba najłatwiej „wyliczyć” 2 z pierwszego. Można to zrobić przy pomocy pierwiastka ($2 = \sqrt{7^a}$), ale lepiej zachować jednolitość – niech będą same potęgi;

podnosimy obie strony do potęgi $\frac{1}{2}$ **czyli** $(7^a)^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}}$

i po wymnożeniu potęg uzyskujemy wzór na 2**:** $2 = 7^{\frac{a}{2}}$ **po czym...**

$$2 = 7^{\frac{a}{2}} \qquad 2^{\frac{x}{2}} = 7^2$$

tak wyliczone 2 podstawiamy do równości drugiej (jak widać, można podstawiać nie tylko litery, lecz także liczby!):

$$(7^{\frac{a}{2}})^{\frac{x}{2}} = 7^2 \qquad 7^{\frac{a}{2} \cdot \frac{x}{2}} = 7^2 \qquad 7^{\frac{ax}{4}} = 7^2$$

Skoro podstawy potęg są równe,to równe są też ich wykładniki – czyli:

$$\frac{ax}{4} = 2 \qquad ax = 8 \qquad x = \frac{8}{a} \qquad \boxed{\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{8}{a}}$$

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{2\cos x}(9 - x^2)$

„Zapisujemy” 3 warunki (patrz Ściągawka) jakim musi podlegać logarytm;

$$\begin{cases} 2\cos x > 0 & (1) \\ 2\cos x \neq 1 & (2) \\ 9 - x^2 > 0 & (3) \end{cases}$$

Trzeba oczywiście każdą z tych nierówności rozwiązać i wyniki zestawić.
Ale od której zacząć, aby było najłatwiej?

Oczywiście (i jak zwykle) od „najłatwiejszej”, a na taką wygląda...

nierówność trzecia: $9 - x^2 > 0$

Choćby dlatego że parabola będąca jej wykresem jest prostsza od cosinusoidy falującej od $-\infty$ do $+\infty$, a że tak szeroko tu faluje widać stąd iż nie nałożono na x częstego w zadaniach ograniczenia $x \in <0,2\pi)$ lub tp.

Zatem najpierw rozwiązujemy nierówność (3):

$$9 - x^2 > 0 \qquad -x^2 > -9 \qquad x^2 < 9 \qquad x \in (-3,3)$$

Teraz nierówność (1):

$2\cos x > 0 \qquad \cos x > 0$ **i teraz z wykresu cosinusoidy w Ściągawce – po wzięciu pod uwagę iż przed chwilą wyszło iż musi być $x \in (-3,3)$ – odczytujemy że** $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Wyszło nam dotąd ze musi być jednocześnie $x \in (-3,3)$ **oraz** $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

z czego wynika że pierwsze jest zbędne czyli pozostaje tylko to drugie.

i wreszcie nierówność (2): $2\cos x \neq 1$ $\quad \cos x \neq \frac{1}{2}$

Zamiast badać kiedy (tzn dla jakich x**) jest** $\cos x \neq \frac{1}{2}$**, zbadajmy kiedy**

$\cos x = \frac{1}{2}$ **?** **(takich** x **jest z pewnością mniej, a zatem będzie „łatwiej”)**

Jak to zbadać?...

Z wykresu tego nie odczytamy (a jeśli, to zbyt niedokładnie). Na szczęście jest w Ściągawce tabelka „Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych”, w której wyczytujemy że $\frac{1}{2}$ to $\cos 60°$. Trzeba by jeszcze jakoś wyrazić ten kąt przy pomocy π, bo lepiej aby jednostka miary była taka taka jak w nierówności poprzedniej. Ale to proste: skoro $360° = 2\pi$ to $60° = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Zaglądamy do wykresu cosinusoidy...

zaznaczamy sobie na osi OY liczbę $\frac{1}{2}$ i odczytujemy dla jakich $\mathrm{x}-\text{ów}$ jest ona wartością cosinusa. Okazuje się że nie tylko dla $\mathrm{x}=\frac{\pi}{3}$, ale także dla całego mnóstwa innych. Na szczęście nie musimy się tym przejmować, albowiem z poprzedniej nierówności wyszło nam że musi być $\mathrm{x} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, co oznacza że interesuje nas tylko $\mathrm{x}=\frac{\pi}{3}$ oraz symetryczny do niego $\mathrm{x}=-\frac{\pi}{3}$.

Podsumowując musi być tak: $\mathrm{x} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ **oraz** $\mathrm{x} \neq -\frac{\pi}{3}$ **oraz** $\mathrm{x} \neq \frac{\pi}{3}$

zatem dziedzinę funkcji można zgrabniej zapisać jako zbiór:

$$(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}) \cup (-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$$

Rozwiąż nierówność:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)+\log_{\frac{1}{3}}(5-x)>\log_{\frac{1}{3}}(3(x+1))$$

Najpierw warunki podstawowe dla poszczególnych logarytmów (liczby logarytmowane muszą być dodatnie):

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ 5-x>0 \\ x+1>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2>1 \\ -x>-5 \\ x>-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x<-1 \vee x>1 \\ x<5 \\ x>-1 \end{cases}$$

co łącznie sprowadza się do:

$$\boxed{x \in (1,5)}$$

A teraz nierówność podana...

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)+\log_{\frac{1}{3}}(5-x)>\log_{\frac{1}{3}}(3(x+1))$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)(5-x)>\log_{\frac{1}{3}}(3x+3)$$

$$(x^2-1)(5-x)>(3x+3)$$

Stop!

Czy „opuszczenie” logarytmów było poprawne ?...

Byłoby dobrze gdyby podstawa logarytmów była >1, bo wówczas logarytm byłby funkcją rosnącą, tj wartość jej wzrastałaby wraz ze wzrostem argumentu. Jednak w nierówności podstawa logarytmów jest <1, a wówczas logarytm jest funkcją malejącą, tzn większa jej wartość oznacza że zmniejszył się argument. Zatem <u>należy zmienić zwrot nierówności na przeciwny</u>, czyli:

$$(x^2 - 1)(5 - x) < (3x + 3)$$

$$5x^2 - x^3 - 5 + x < 3x + 3$$

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 > 0$$

Takie równanie (stopnia >2) da się rozwiązać, jeśli lewą stronę rozłożymy na iloczyn – a tego można dokonać albo przez uparte wyciąganie przed nawias albo przez „odgadnięcie” jednego pierwiastka wielomianu...

$x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ **(jak widać, nie ma czego wyciągać przed nawias)**
Musimy „trafić” jakiś pierwiastek. Twierdzenie o Dzielnikach (w Pamiętawce) poucza że należy go szukać wśród dzielników liczby 8 – czyli $\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm 8$.
Próbujemy kolejno i okazuje się, że wielomian zeruje się dla $x = -1$.
Według Twierdzenia Bezota (też w Pamiętawce) oznacza to, że wielomian ten dzieli się (bez reszty) przez wielomian $x + 1$. Zatem dzielimy:

$$\begin{array}{l}
\quad x^2 - 6x + 8 \\
\hline
x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \quad | \; x + 1 \\
x^3 + x^2 \\
\hline
\quad -6x^2 + 2x + 8 \\
\quad -6x^2 - 6x \\
\hline
\qquad\qquad 8x + 8 \\
\qquad\qquad 8x + 8
\end{array}$$

A teraz znajdujemy pierwiastki wielomianu będącego wynikiem dzielenia:

$$x^2 - 6x + 8$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4 \qquad \sqrt{\Delta} = 2$$

$$x_1 = \frac{6-2}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{6+2}{2} = 4$$

Nierówność $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 > 0$ można więc zapisać w postaci...

w postaci iloczynowej: $(x+1)(x-2)(x-4)>0$

Funkcja po lewej stronie zeruje się tylko dla trzech $x-\text{ów}:\ -1\ \ 2\ \ 4$ **– czyli poza nimi (w czterech przedziałach) jest albo stale dodatnia albo stale ujemna. Jak jest?... aby to ustalić, należy pobrać z każdego przedziału próbkę.**
Np z przedziału $(-1,2)$ **wziąć** 0 **– wyjdzie że wielomian przyjmuje wartość dodatnią, a zatem jest dodatni w całym tym przedziale.**

Postępując w ten sposób ustalimy że wielomian jest >0 **dla**

$$\boxed{x\in(-1,2)\cup(4,+\infty)}$$

a że wcześniej okazało się że musi być także

$$\boxed{x\in(1,5)}$$

więc ostatecznie: $\boxed{\boxed{x\in(1,2)\cup(4,5)}}$