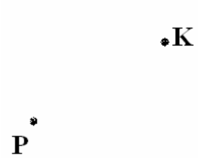
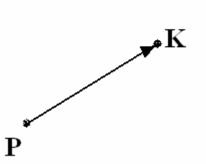
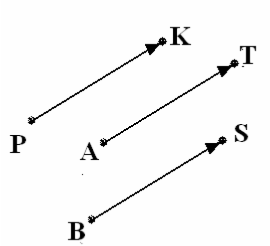
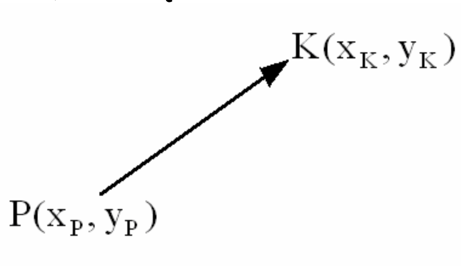
Wektory (czyli Przesunięcia)

	**Wydaje się że przesunięcie jest czymś „od... do...”, np:** **od punktu P (P jak Początek)** **do punktu K (K jak Koniec)**
	**Możemy to ładnie oznaczyć strzałką, ale...** **Czy ta strzałka rzeczywiście obrazuje przesunięcie?**
	**A jeśli są 3 takie strzałki? (a można narysować ich więcej)** **Przecież obrazują to samo przesunięcie!** **Wniosek:** **Przesunięcia nie da się narysować. Można tylko podać jego konkretne przykłady rysując strzałki i notując je w postaci :** $\overrightarrow{\mathrm{PK}}$ $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ $\overrightarrow{\mathrm{BS}}$

A może uda się jednoznacznie wyrazić przesunięcie liczbami?...

Tak, uda się:



Można obliczyć przesunięcie wzdłuż osi X $= x_K - x_P$ **oraz wzdłuż osi Y** $= y_K - y_P$, **i zapisać obie te liczby w nawiasie:**

$$\overrightarrow{PK} = [x_K - x_p, y_K - y_P]$$

To jest właśnie przesunięcie, czyli <u>wektor</u>

Dla każdej z trzech narysowanych wcześniej strzałek wyjdzie oczywiście ten sam wektor – tutaj $\approx [3,2]$**. Strzałki obrazują ten sam wektor jeśli mają tę samą długość, są równoległe i wskazują ten sam kierunek (mają ten sam „zwrot”).**

Najzgrabniej będzie, kiedy zapiszemy wektor jako różnicę dwóch punktów:

$\overrightarrow{PK} =$ **(koniec** K **) – (początek** P **)** $= K - P$ (odejmujemy „po współrzędnych”)

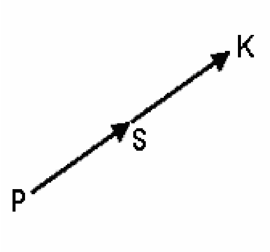
Wektor wygląda więc w zapisie jak punkt (kształt nawiasu jest nieistotny).

Skoro wprowadzilismy odejmowanie punktów (wektorów) , to warto wprowadzić analogicznie ich dodawanie (rachunki będą bardziej przejrzyste) oraz mnożenie punktu (wektora) przez liczbę (co wektor wydłuża bądź skraca).

Dane są końce odcinka. Wyliczyć jego środek.

Oznaczmy: $P \quad K$ **= końce odcinka,** S **= jego środek, sporządźmy rysunek to i spójrzmy na to wektorowo.**

Najprościej sprawdzić, czy jakieś wektory są równe...



Oczywiście $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{SK}$

co można rozpisać do postaci $K - S = S - P$

z czego już łatwo wyliczyć (jak na liczbach) $S = \dfrac{P+K}{2}$

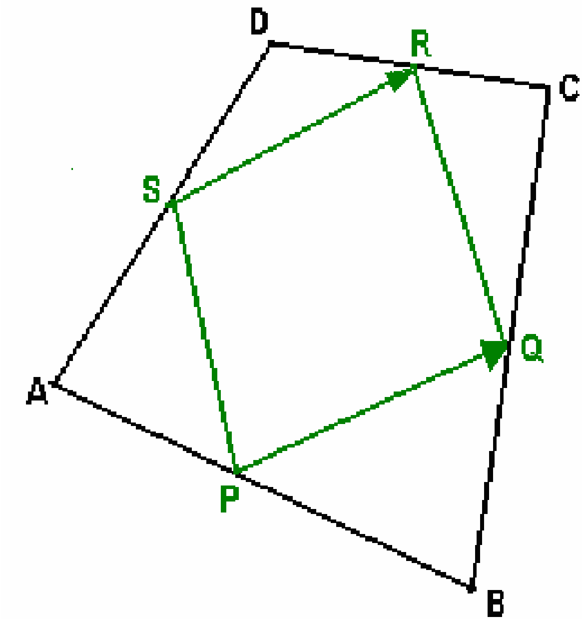
Przykład:

Jeśli $P = (2{,}3) \quad K = (3{,}5)$

to $S = \dfrac{P+K}{2} = \dfrac{(2{,}3)+(3{,}5)}{2} = \dfrac{(2+3{,}3+5)}{2} = \dfrac{(5{,}8)}{2} = (\frac{5}{2}{,}4)$

Zbadać czy środki boków czworokąta tworzą jakąś figurę.

Rysujemy i szukamy wektorów równych...



Patrząc na rysunek wydaje nam się, że PQRS jest równoległobokiem, czyli że $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$. Sprawdźmy.

Rozpiszmy to jako $R - S = Q - P$

$P \quad Q \quad R \quad S$ są środkami boków czworokąta ABCD, zatem można w powyższym podstawić:

$$P = \frac{A+B}{2} \qquad Q = \frac{B+C}{2}$$

$$R = \frac{C+D}{2} \qquad S = \frac{D+A}{2}$$

po czym łatwo sprawdzić że otrzymana równość:

$$\frac{C+D}{2}-\frac{D+A}{2}=\frac{B+C}{2}-\frac{A+B}{2}$$ **jest prawdziwa (sprowadza się do $C-A=C-A$)**

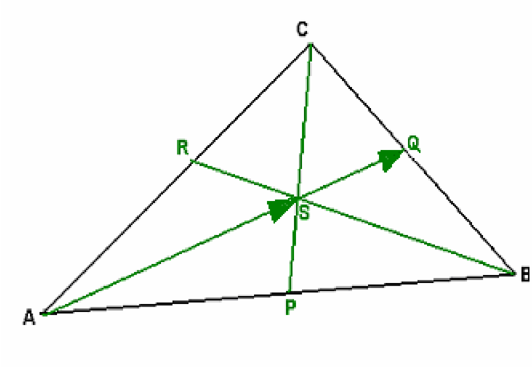
Było to przejrzyste, proste i szybkie. Bez wektorów byłby to b.twardy orzech.

Kolejne zagadnienie dla badacza:

Czy środkowe trójkąta przecinają się we wspólnym punkcie i jak ten punkt jest położony, to jest jak go wyznaczyć?

Oczywiście trzeba wiedzieć co to jest „środkowa". Jest to odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Tyle powinno wystarczyć...



Na rysunku środkowe przecinają się we wspólnym punkcie S. Oczywiście jeszcze nie wiemy czy tak jest zawsze, ale odłóżmy to na potem.

Przypatrując się środkowej AQ wysuwamy przypuszczenie że AS jest 2 razy dłuższe od SQ.

Zatem hipoteza brzmi: $\overrightarrow{AS} = 2 \cdot \overrightarrow{SQ}$

czyli $S - A = 2 \cdot (Q - S)$ skąd wyliczamy że $S = \dfrac{2Q + A}{3}$

Podstawiając $Q = \dfrac{B + C}{2}$ otrzymujemy $\boxed{S = \dfrac{A + B + C}{3}}$

Zauważmy że dla pozostałych środkowych wyjdzie tyle samo, co oznacza że rzeczywiście przecinają się one we wspólnym punkcie S, o wzorze jak wyżej. Zatem ten wzór jest prawdziwy!

$B = (-4,7)$ $\vec{u} = [-3,5]$ $\overrightarrow{AB} = -3\vec{u}$ **Oblicz** A

Na $\overrightarrow{AB}$ **nie ma jak rachować, więc zamieniamy to na** $B - A$**, po czym...**

$$B=(-4,7) \quad \vec{u}=[-3,5] \quad B-A=-3\vec{u}$$

wypisujemy podane równania jako układ równań:

$$\begin{cases} B=(-4,7) \\ \vec{u}=[-3,5] \\ B-A=-3\vec{u} \end{cases}$$

Rozwiązujemy to jak zwykły układ:

To co jest już wyliczone w dwóch pierwszych podstawiamy do trzeciego, otrzymując równanie:

$$(-4,7)-A=-3\cdot[-3,5]$$ **i dalej**

$$(-4,7)-A=[9,-15]$$

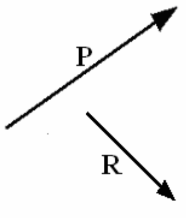
$$-A=[9,-15]-(-4,7)$$

$$-A=[13,-22]$$

$$A=[-13,22]$$

Działania na wektorach pokazane graficznie

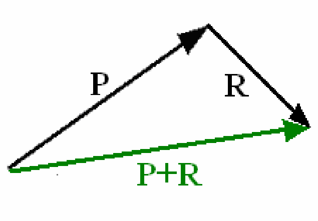
Jak wyrysować strzałkę obrazującą sumę dwóch wektorów?



Punkt będący początkiem strzałki P zostaje przesunięty przez tę strzałkę na jej koniec. Następnie należy ten punkt przesunąć strzałką R.

W tym celu można strzałkę R można przesunąć (równolegle!), tak by jej początek był na końcu P. I punkt znowu przesunąć. Proszę to wyrysować...

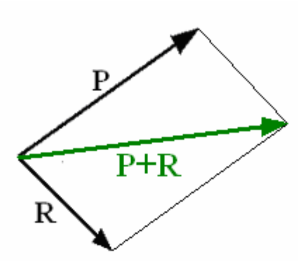
Tak to będzie wyglądać:



Teraz widać że punkt zostanie ostatecznie przesunięty tak jak przesunęła go strzałka zielona.

I ona właśnie obrazuje wektor $P + R$

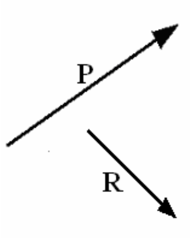
Można to wyrysować jeszcze wyraziściej...



Tak to się najczęściej rysuje – jako równoległobok.

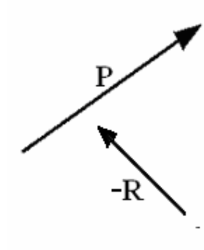
Teraz obie strzałki są zakotwiczone w jednym punkcie, co lepiej uzmysławia sytuację, bo wygląda to tak jakby obie jednocześnie ten punkt przesuwały.

A teraz wyrysujmy różnicę wektorów, czyli $\mathrm{P}-\mathrm{R}$ **...**



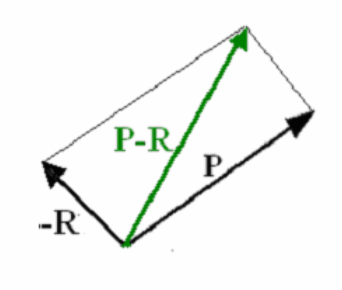
Najpierw strzałkę R zmieniamy na $-\mathrm{R}$

Algebraicznie odpowiada to przemnożeniu obu współrzędnych wektora R przez -1



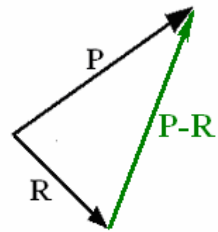
Aby uzyskać wektor $\mathrm{P}-\mathrm{R}$ wystarczy te wektory dodać (jak uprzednio)...

Oto rezultat:



Można to wykonać nieco szybciej –
bez mnożenia wektora R przez -1

Patrz rysunek z prawej:

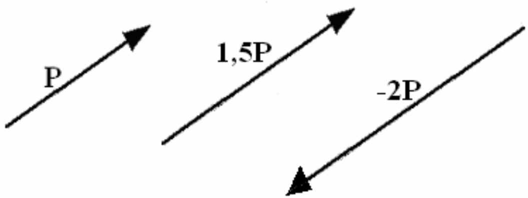


A teraz proszę wyrysować jakąś strzałkę obrazującą jakiś wektor, a następnie:

1) strzałkę obrazującą ten wektor pomnożony przez $1{,}5$

2) strzałkę obrazującą ten wektor pomnożony przez -2

...



Oczywiście wektory te są równoległe.

Drugi jest 1,5 raza dłuższy.

Trzeci jest 2 razy dłuższy, ale zwrócony w stronę odwrotną.